Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2022**	**63910**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Analysis**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen zusammenhängenden Text nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

(a) Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen 2 konvergiert. Zeigen Sie folgende zwei Aussagen anhand der Definition für die Konvergenz einer reellen Zahlenfolge:

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : \ a_n > 1.$

(ii) Die Folge $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ ist konvergent.

(b) In dieser Teilaufgabe heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cool im Punkt* $a \in \mathbb{R}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0\, \forall x \in \mathbb{R} : \big(|x-a| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\big).$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) f cool im Punkt $a \Longrightarrow f$ stetig im Punkt a.

(ii) f stetig im Punkt $a \Longrightarrow f$ cool im Punkt a.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien $U := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ und $V := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

(a) Konstruieren Sie eine biholomorphe Abbildung $h\colon U \to V$.

(b) Konstruieren Sie eine Stammfunktion $f\colon V \to \mathbb{C}$ der Funktion $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ mit $f(i) = i$. Entscheiden Sie, ob f eindeutig bestimmt ist.

(c) Sei $\gamma\colon [0,1] \ni t \mapsto t + i\cos(\frac{\pi}{2}t)$. Berechnen Sie das komplexe Wegintegral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ sowie seinen Real- und Imaginärteil.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie $\sup\{|\cos z| \mid z \in \mathbb{C}\}$,

(a) indem Sie einen geeigneten Satz der Funktionentheorie anwenden, also insbesondere ohne die Funktionswerte von $|\cos z|$ zu betrachten,

(b) indem Sie für $R > 0$ zeigen, dass die Funktion $f(z) = |\cos z|$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ ihr Maximum annimmt, und diesen Wert sowie sein Verhalten für $R \to \infty$ bestimmen.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die maximale Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + e^{x_2} x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1\, x_2^2, \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_2\, x_3 \end{aligned}$$

zu folgender Anfangsbedingung:

$$\text{(a)} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(b)} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass in den Anfangsdaten jeweils eine Komponente gleich 0 ist.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = (1 - x^2)\, e^{\sin x}, \quad x(0) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte, maximale, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Zeigen Sie für die Lösung x aus (a), dass die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$ existieren, und bestimmen Sie diese.

(c) Bestimmen Sie für die Lösung x aus (a) das Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $t = 0$.

(2+2+2 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen zusammenhängenden Text nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Es sei $D_R = [0,1] \times [0,R]$ für $R > 1$ und $f\colon D_R \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x(1-x)ye^{-y} \qquad \text{für alle } (x,y) \in D_R.$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen das globale Maximum angenommen wird.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$I_R := \int_{D_R} f(x,y)\, d(x,y)$$

und den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$.

(1+3+2 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei

$$f(z) = \frac{z-\pi}{\sin z} + z \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

(a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f und jeweils deren Typ.

(b) Berechnen Sie

$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz.$$

(4+2 Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ist $f\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned} u''(t) - u(t) &= t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, &\quad u'(0) = 1. \end{aligned}$$

(b) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für alle $y_0 \in (0,1)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y(y-1)g(y), \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $y(t) \in (0,1)$ für alle $t \in [0,\infty)$ hat.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5:

Konstruieren Sie eine nicht-konstante, stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derart, dass die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ jeweils die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Die Funktion $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $E(x) := x_1^2 + x_2^2$ ist eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) der Differentialgleichung.

(b) Zusätzlich zu der Eigenschaft in (a) besitzt die Differentialgleichung die stationären Lösungen $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$ und keine weiteren.

(c) Zusätzlich zu den Eigenschaften in (a) und (b) besitzt die Differentialgleichung zwei Lösungen $x_\pm\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x_+(t) = (1,0) &= \lim_{t\to-\infty} x_-(t) \quad \text{und} \\ \lim_{t\to-\infty} x_+(t) = (-1,0) &= \lim_{t\to\infty} x_-(t). \end{aligned}$$

Weisen Sie in jedem Aufgabenteil nach, dass die von Ihnen konstruierte Funktion f diese Eigenschaften tatsächlich besitzt.

(1+2+3 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen zusammenhängenden Text nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie Ihre Entscheidung:

(a) Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0, i, -i\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)}$$

um 1 ist 1.

(b) Es gibt eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei 0 und Residuum $\operatorname{Res}(g, 0) = 0$.

(c) Die Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $h_n(x) = xe^{-\frac{x^2}{n}}$ für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^k}\, dt$$

existiert.

(b) Weisen Sie nach, dass

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^k}\, dt = \frac{\pi}{k \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right)}.$$

Hinweis: Ein Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve, die von 0 zu R und $R \cdot e^{\frac{2\pi i}{k}}$ und dann zurück zu 0 geht, könnte helfen.

(1+5 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und $G := H \setminus \{iy : y \in (0,1]\}$.

(a) Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $f : H \to \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : H \to \mathbb{E}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ biholomorph ist.

(c) Konstruieren Sie eine biholomorphe Abbildung $h : G \to \mathbb{E}$.

(1+3+2 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei die Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass f lokal lipschitzstetig ist.

(b) Berechnen Sie eine Lösung $\mu : J \to \mathbb{R}$ von

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0,$$

deren Graph $\Gamma(\mu) = \{(t, \mu(t)) : t \in J\}$ in $[0,\infty)^2$ enthalten ist. Hierbei ist J ein geeignet zu wählendes reelles Intervall.

(c) Zeigen Sie, dass $x' = f(x)$, $x(0) = 0$ eine maximale Lösung besitzt und bestimmen Sie diese inklusive des maximalen Existenzintervalls.

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus (b).

(1+3+2 Punkte)

Aufgabe 5:

Untersuchen Sie für alle Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + ax^3 + by + a^2y^2, \\ \dot{y} &= -bx + ay - a^2y^2 \end{aligned}$$

auf ihre Stabilitätseigenschaften.

(6 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2022**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte).

Gegeben sei die Gruppe

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q}) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, ac \neq 0\}$$

der invertierbaren oberen 2×2-Dreiecksmatrizen über $\mathbb{Q}$. Ferner seien

$$H = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid c = a\} \quad \text{und} \quad U = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid b = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist und dass durch

$$\varphi: G/H \longrightarrow \mathbb{Q}^\times \qquad \text{mit} \quad \varphi(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]) = \frac{a}{c}$$

ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von G, aber kein Normalteiler ist.

(c) Betrachten Sie die Operation von U auf H durch Konjugation. Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen dieser Gruppenoperation an.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei R der Faktorring $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 7X + 12)$.

(a) Zeigen Sie, dass R als Ring zu $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ isomorph ist.

(b) Geben Sie explizit einen Ringisomorphismus $\varphi: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow R$ an.

(c) Bestimmen Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{Q}$, sodass die Restklasse von $X + a$ in R eine Einheit ist, und finden Sie jeweils das dazu inverse Element.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $a \in L$. Zeigen Sie, dass a genau dann ein primitives Element für L/K ist, wenn die Elemente $\sigma(a)$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ paarweise verschieden sind.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist und bestimmen Sie die Elemente der Galoisgruppe.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ das Element $a = \sqrt{3} + q \cdot i$ ein primitives Element der Galoiserweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^4 + 5X^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Es sei $Z \subset \mathbb{C}$ sein Zerfällungskörper in $\mathbb{C}$ und $\alpha \in Z$ eine Nullstelle.

(a) Dividieren Sie das Polynom $f(X)$ durch $X^2 - \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)[X]$, ohne die Nullstelle explizit zu berechnen.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(\alpha^3 + 3\alpha)^2 = -(5 + \alpha^2)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $[Z : \mathbb{Q}] = 4$ und $\mathrm{Gal}(Z/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\Phi_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ das n-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $X^n - 1 = (X - 1) \cdot h(X)$ mit einem Polynom $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $h(1) = n$.

(b) Ist $n = p^k$ für eine Primzahl p und $k \geq 1$, so gilt $\Phi_n(1) = p$.

(c) Hat n mindestens zwei Primzahlen $p \neq q$ als Teiler, so ist $\Phi_n(1) = 1$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Eine *affine Ebene* in $\mathbb{R}^3$ ist die Menge aller Punkte (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$, die eine Gleichung der Form $ax + by + cz + d = 0$ erfüllen mit fest vorgegebenen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

(a) Für $j = 1, 2, 3, 4$ seien vier Punkte $P_j = (x_j, y_j, z_j) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, dass P_1, P_2, P_3, P_4 genau dann in einer affinen Ebene liegen, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Sei $C = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$, und sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene. Zeigen Sie, dass $C \cap E$ höchstens drei Elemente hat.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei K ein Körper, sei $K[X]$ der Polynomring über K in einer Unbestimmten, und sei $L = K(X)$ der Quotientenkörper von $K[X]$. Sei weiter

$$R = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in K[X],\ \mathrm{ggT}(a, b) = 1,\ b(0) \neq 0\} \subseteq L.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge R ist ein Unterring von L.

(b) Sei I ein Ideal von R. Dann ist $I \cap K[X]$ ein Ideal von $K[X]$.

(c) Der Ring R ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Es ist $337 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 + 7 = 13 \cdot 17 + 2^2 \cdot 29$. Erklären Sie, dass daraus folgt, dass 337 eine Primzahl ist.

(b) Sei p eine Primzahl und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^n = 1$ in $\mathbb{F}_p$ genau $\mathrm{ggT}(n, p-1)$ verschiedene Lösungen besitzt.

(c) Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die die Gleichung $x^n = 1$ im Ring $R := \mathbb{Z}/2022\,\mathbb{Z}$ genau n Lösungen hat.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $f = X^6 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Das Polynom f ist über $\mathbb{Q}$ irreduzibel.

(b) Die Zahl $\zeta := \frac{1}{2}(1 + \alpha^3) \in K$ ist eine primitive sechste Einheitswurzel.

(c) Der Körper K ist eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$.

(d) Die Galoisgrupppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2022.

(a) Nennen Sie vier paarweise nicht isomorphe Beispiele von Gruppen der Ordnung 2022 und begründen Sie, dass die Gruppen paarweise nicht isomorph sind.

(b) Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

(c) Beweisen Sie, dass G einen Normalteiler H vom Index 2 besitzt.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei eine endliche Körpererweiterung L/K. Weiterhin sei $\mathrm{Tr}_{L/K}: L \longrightarrow K$ die Abbildung, die jedem Element $a \in L$ die Spur der Multiplikation $m_a: L \longrightarrow L$ $(b \mapsto ab)$ zuordnet. Dabei ist die *Spur* einer K-linearen Abbildung $\varphi: L \longrightarrow L$ definiert als die Summe der Hauptdiagonalelemente einer Darstellungsmatrix.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}_{L/K}$ eine K-lineare Abbildung ist.

(b) Nun sei $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine K-Basis von L. Beweisen Sie, dass sich die *Diskriminante* $\Delta_{L/K}(a_1, \ldots, a_n) = \det(\mathrm{Tr}_{L/K}(a_i a_j)_{i,j})$ um einen Faktor aus $(K^\times)^2$ ändert, wenn man die Basis wechselt.

(c) Seien $p, q \in \mathbb{Q}$ so gewählt, dass $X^2 + pX + q$ ein irreduzibles Polynom ist. Finden Sie $\Delta_{L/K}(1, x)$ für $K = \mathbb{Q}$ und $L = K[X]/(X^2 + pX + q)$, wobei x die Restklasse von X in L bezeichne.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie eine vollständige Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier ganzer Zahlen an.

(b) Beweisen Sie mithilfe Ihrer Definition aus (a), dass für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ die folgende Formel gilt:

$$\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a,b), \mathrm{kgV}(c,d)) = \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a,c), \mathrm{kgV}(b,d))$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$, und sei G eine Gruppe der Ordnung $p \cdot q \cdot r$. Für $i \in \{p, q, r\}$ bezeiche s_i die Anzahl der verschiedenen i-Sylowuntergruppen von G. Beweisen Sie:

(a) Besitzt G keine normale Sylowuntergruppe, so gilt $s_p \geq q$ und $s_q \geq r$ und $s_r = pq$.

(b) Die Gruppe G besitzt eine normale Sylowuntergruppe.

(c) Eine Gruppe der Ordnung 2022 ist nicht einfach.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Z}[X]/(X^5 + 2,\, X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$.

(a) Beweisen Sie, dass $3 \in (X^5 + 2,\, X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.

(c) Beweisen Sie, dass K eine Galoiserweiterung seines Primkörpers $\mathbb{F}_3$ ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe von $K/\mathbb{F}_3$.

(d) Sei x die Restklasse von X in K. Zeigen Sie, dass $\{x, x^3, x^9, x^{27}\}$ eine $\mathbb{F}_3$-Basis von K ist und bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der Elemente der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_3)$ bzgl. dieser Basis.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und sei I der Durchschnitt der maximalen Ideale von R.

(a) Zeigen Sie, dass I ein Ideal von R ist.

(b) Beweisen Sie, dass ein Element $a \in R$ genau dann in I liegt, wenn für alle $b \in R$ das Element $ab - 1$ eine Einheit von R ist.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________ Kennwort: ____________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Herbst 2022**	**63918**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Fachdidaktik**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 2

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

1. Erläutern Sie den Begriff „gebrochen-rationale Funktion“!

2. Beschreiben Sie zwei unterrichtliche Aktivitäten zur Untersuchung des Symmetrieverhaltens von Funktionen!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit, in der Funktionen der Form $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ behandelt werden!

Thema Nr. 2

1. Erläutern Sie die beiden Grundvorstellungen „Tangentensteigung“ und „lokale Änderungsrate“ zum Ableitungsbegriff!

2. Erläutern Sie die mathematische Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ im Rahmen der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ jeweils anhand eines Beispiels der Sekundarstufe I und II!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zur Einführung des Ableitungsbegriffs anhand der Tangentenvorstellung!

Thema Nr. 3

1. Erläutern Sie den Begriff Flächeninhalt auf dem Niveau der Unterstufe aus fachlicher Sicht!

2. Die Flächeninhaltsformel für das Trapez kann unterschiedlich interpretiert werden. Erläutern Sie je eine geeignete geometrische Interpretation für $A = (a + c) \cdot \frac{h}{2}$ bzw. $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$! Nennen Sie dabei auch Lernziele, die mit der Betrachtung dieser verschiedenen Interpretationen verfolgt werden können!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zur Herleitung der Flächenformel eines Trapezes!

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2022**	**43910**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Differential- und Integralrechnung**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

Es sei

$$a_n = \int_0^n \frac{e^{-s}}{1+s^2}\, ds.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt ist.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie, für welche $N \in \{1,2\}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan(kN\pi)}{k^N}$$

konvergiert.

(b) Bestimmen Sie, für welche $N \in \{1,2\}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kN\pi)}{\sqrt[N]{k}}$$

konvergiert.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = xe^{(x^2)}$$

und $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f. Zeigen Sie, zum Beispiel mit der Taylorreihe, dass $f^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 4

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{ax}\sin(bx).$$

Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $f_{a,b}$ folgende zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

- $f_{a,b}$ ist surjektiv.
- Es gilt
$$\lim_{x\to\infty} f_{a,b}(x) = 0.$$

Aufgabe 5

Es sei

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 1,\ -2 \leq y \leq 0\}$$

und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x + ye^{x+y}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge R.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte im Inneren von R.

(c) Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert, den f auf R annimmt.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, zum Beispiel mit dem Mittelwertsatz, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)$$

divergiert.

(c) Folgern Sie, dass die Folge

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

divergiert.

Aufgabe 2

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \arctan|x|$$

und

$$g(x) = \cos(f(x)).$$

(a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f differenzierbar ist. Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion g differenzierbar ist. Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

Aufgabe 3

Es sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom P_2 der Funktion f im Entwicklungspunkt 2.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [2, 3]$ die Abschätzung

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{512}$$

gilt.

(c) Geben Sie – ohne Verwendung eines Taschenrechners – eine rationale Zahl an, die $\sqrt{5}$ bis auf $\frac{1}{500}$ genau approximiert.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x - (y-3)^2)(y - x - 1).$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze der Menge

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

an. Kennzeichnen Sie in dieser Skizze auch die Bereiche

$$P := \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$$

und

$$N := \{(x, y) : f(x, y) < 0\}.$$

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f und bestimmen Sie, ob in einem von diesen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Aufgabe 5

Gegeben seien die beiden Anfangswertprobleme:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{x^2}{y(x)^2}, \quad y(1) = 1, \tag{D1}$$

und

$$u'(x) = -\frac{1}{x \cdot u(x)^2}, \quad u(1) = 1. \tag{D2}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $J \subseteq]0, \infty[$ ein Intervall und ist $u : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems (D2), so ist $y : J \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = x \cdot u(x)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (D1).

(b) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (D2).

(c) Geben Sie nun eine Lösung des Anfangswertproblems (D1) an (unter Zuhilfenahme der Teilaufgaben (a) und (b)).

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge mit $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

(a) Zeigen Sie $a_n \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und folgern Sie, dass der Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$R \geq \frac{1}{4}$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie

$$(1 - x - x^2 - x^3) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für alle $x \in \,]-R, R[$.

(c) Schreiben Sie

$$f :]-R, R[\,\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

als gebrochen rationale Funktion.

Aufgabe 2

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{x^2}^{x^4} \exp(-t^2)\, dt.$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Bestimmen Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}.$$

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

(d) Zeigen Sie: Die Funktion f besitzt ein globales Minimum.

Aufgabe 3

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_1 = 1$ und

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}(x_1 + \ldots + x_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1}$$

gilt, und folgern Sie

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Sei

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|\}$$

und

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 - 24x - 3y^2.$$

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Zeigen Sie, dass f kein globales Maximum besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie alle Punkte $p \in D$, an welchen die Funktion f ihr globales Minimum annimmt.

Aufgabe 5

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2} + \arctan(x).$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 + x^2) \cdot y'(x) - 2x \cdot y(x) = 1.$$

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2022**	**43912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Lineare Algebra/Geometrie**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Sei $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome in X mit Grad ≤ 3 versehen mit dem durch

$$(X^i, X^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \text{für alle } 0 \leq i, j \leq 3$$

festgelegten Skalarprodukt. Sei $U := \{p(X) \in V \mid p(1) = 0\} \subseteq V$ die Teilmenge aller Polynome mit Nullstelle 1.

a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

b) Zeigen Sie, dass $p(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ ein Element von U ist und ergänzen Sie $p(X)$ zu einer orthogonalen Basis von U.

c) Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$.

2. Aufgabe

Sei

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ 0 & -s & -s^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \mathbf{b}_s = \begin{pmatrix} 2s \\ s^2+1 \\ -s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Sei

$$f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto A_s\mathbf{x}$$

die von A_s definierte lineare Abbildung.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s die Lösungsmenge $\mathbb{L}_s$ der Gleichung $f_s(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_s$.

b) Betrachten Sie die Gerade

$$g = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die g und $\mathbb{L}_s$

i) sich schneiden, bzw. *ii)* gleich, *iii)* windschief oder *iv)* parallel sind.

3. Aufgabe

Entscheiden Sie begründet, ob es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gibt, bezüglich der beide Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalgestalt haben, und geben Sie gegebenenfalls eine solche Basis an.

4. Aufgabe

Gegeben seien die Spiegelung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Gerade $y + x = 3$ und die Drehung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Drehwinkel $\frac{3\pi}{2}$ um den Punkt $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Sei

$$\varphi := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

die Verknüpfung. Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor $\mathbf{t}$.

b) Bestimmen Sie den Typ der Bewegung φ und ihre bestimmenden Merkmale (z.B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.).

5. Aufgabe

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt seien die Punkte

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$M := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = 8 \,\}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass M Teilmenge einer Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $\mathbf{m}$, die Hauptachsen und die euklidische Normalform von Q.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie die inverse Matrix $B^{-1} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

b) Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A \cdot B = B \cdot X$$

und zeigen Sie, dass hierfür

$$\det(X) = \det(A)$$

gilt.

2. Aufgabe

In Abhängigkeit von den Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ werde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha & \gamma & \beta \\ -1 & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

sowie die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x$$

betrachtet. Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern}(f) \quad \text{und zugleich} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Bild}(f).$$

3. Aufgabe

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum der Dimension $\dim(V) = 3$; ferner sei b_1, b_2, b_3 eine Basis von V.

a) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit

$$f(b_1) = -b_2 + b_3, \quad f(b_1 + b_2) = -b_1 - b_2, \quad f(b_2 + b_3) = b_2 - b_3$$

gibt, und bestimmen Sie die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von f bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 von V.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aus a) und geben Sie für jeden Eigenraum eine Basis an.

c) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f : V \to V$ aus a) diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Basis von V aus Eigenvektoren von f an.

4. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über $n \times n$–Matrizen für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

b) Eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die höchstens die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ besitzt, ist orthogonal.

c) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die höchstens die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ besitzt, ist orthogonal.

5. Aufgabe

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Quadrik

$$Q_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (2t+1)(x^2+y^2) + 2\,x\,y + \sqrt{2}\,(x-y) = 0 \right\}$$

gegeben; dabei ist $t \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ die euklidische Normalform der Quadrik Q_t.

b) Skizzieren Sie die Quadrik Q_0 im x–y–Koordinatensystem.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Sei A jeweils eine beliebige invertierbare Matrix. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) A^2 ist invertierbar.

b) $AA^\top$ ist invertierbar.

c) $A + A^\top$ ist invertierbar.

2. Aufgabe

Gegeben seien der affine Unterraum E von $\mathbb{R}^3$ in Parameterform

$$E := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

und die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y + 2z + 1 \\ x + y + z - 3 \\ 2x + y - 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $f(E)$ in Parameterform.

b) Schreiben Sie E als Lösungsmenge einer linearen Gleichung.

c) Berechnen Sie $f^{-1}(E)$.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom reellen Parameter s alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche gleichzeitig folgende zwei Bedingungen erfüllen:

$$A \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe

In $\mathbb{R}^2$ seien die Gerade $g : 2x + y = 3$ und der Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Die Spiegelung an g werde mit σ_g bezeichnet. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne τ_v die Translation mit v.

a) Zerlegen Sie u in einen Vektor s senkrecht zu g und einen weiteren Vektor p parallel zu g:

$$u = s + p\ .$$

b) Bestimmen Sie den Typ der Kongruenzabbildung

$$\tau_s \circ \sigma_g$$

und ihre bestimmenden Merkmale, wie z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.

c) Bestimmen Sie den Typ der Kongruenzabbildung

$$\tau_p \circ \tau_s \circ \sigma_g = \tau_u \circ \sigma_g$$

und ihre bestimmenden Merkmale, wie z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.

5. Aufgabe

Wir betrachten die durch

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 30x - 40y - 25 = 0$$

gegebene ebene Quadrik E.

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von E.

b) Berechnen Sie den Mittelpunkt und die Symmetrieachsen von E.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2022**	**43917**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Fachdidaktik - Grundschulen**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 2

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

1. Erklären Sie das schriftliche Subtraktionsverfahren „Abziehen mit Entbündeln"! Erläutern Sie dabei auch die zugrundeliegende Zahldarstellung im Dezimalsystem!

2. Erläutern Sie schwierigkeitsbestimmende Merkmale von Aufgaben zur schriftlichen Subtraktion anhand geeigneter Beispiele mit dem oben genannten Verfahren!

3. Entwerfen Sie eine Unterrichtseinheit, in der die Schülerinnen und Schüler lernen, eine angemessene Art der Berechnung (im Kopf, halbschriftlich, schriftlich) zur Lösung von Subtraktionsaufgaben auszuwählen!

Thema Nr. 2

1. Erläutern Sie die Begriffe „Prisma", „Quader" und „Würfel" und ihre Beziehungen zueinander! Leiten Sie die Formel des Quadervolumens für ganzzahlige Kantenlängen her!

2. Erläutern Sie drei Aktivitäten für das Verständnis des Begriffs „Volumen" am Beispiel geometrischer Körper!

3. Entwickeln Sie eine handlungsorientierte Unterrichtseinheit zum Thema „Der Rauminhalt von Quadern"!

Thema Nr. 3

1. Erläutern Sie die Begriffe „Größe" und „Messen" und beziehen Sie sich dabei auf die Größenbereiche „Längen" und „Gewichte (Masse)"!

2. Beschreiben Sie drei verschiedene Lernaktivitäten zum Messen und Vergleichen mit Schokoladentafeln! Erläutern Sie jeweils, was dabei zu unterschiedlichen Größenbereichen erlernt werden kann!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zum Messen mit selbstgewählten Maßeinheiten bei Längen! Ziel der Stunde soll nicht (nur) sein, die Notwendigkeit von standardisierten Maßeinheiten zu zeigen, sondern das zentrale Ziel soll sein, grundlegende Erkenntnisse zum Messen zu erlangen!

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ___ Kennwort: ___ Arbeitsplatz-Nr.: ___	**Herbst 2022**	**43918**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**
Einzelprüfung: **Fachdidaktik - Mittelschulen**
Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3
Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 2

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

1. Erläutern Sie die Begriffe „Überschlagen“, „Runden“ und „Schätzen“!

2. Erläutern Sie je eine unterrichtliche Aktivität zu den Begriffen „Überschlagen“, „Runden“ und „Schätzen“!

3. Entwerfen Sie eine Unterrichtseinheit, in der Sie die Regeln für das „Runden“ natürlicher Zahlen einführen!

Thema Nr. 2

1. a) Erläutern Sie den Begriff „regelmäßiges Vieleck“!
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines regelmäßigen Achtecks mit der Seitenlänge 1!

2. Diskutieren Sie drei unterrichtliche Aktivitäten zur Innenwinkelsumme des Dreiecks!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit, in der die Maße der Innenwinkel regelmäßiger Vielecke untersucht werden!

Thema Nr. 3

1. Erläutern Sie die Begriffe „Parallelogramm“ und „Dreieck“!

2. Erläutern Sie drei Möglichkeiten zur Herleitung der Flächeninhaltsformel des Parallelogramms im Mathematikunterricht der Mittelschule und diskutieren Sie diese unter fachdidaktischen Gesichtspunkten!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zum geraden Dreiecksprisma!

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ___ Kennwort: ___ Arbeitsplatz-Nr.: ___	**Herbst 2022**	**43919**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**
Einzelprüfung: **Fachdidaktik - Realschulen**
Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3
Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 2

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

1. Erläutern Sie die Begriffe „gewöhnlicher Bruch" und „Dezimalzahl"! Gehen Sie dabei auch auf Spezialfälle ein!

2. Diskutieren Sie unterrichtliche Aktivitäten zur wechselseitigen Umrechnung von gewöhnlichen Brüchen und Dezimalzahlen! Gehen Sie dabei auf die verschiedenen Arten von Dezimalzahlen ein!

3. Entwerfen Sie eine Unterrichtseinheit, in der die Vor- und Nachteile der beiden Darstellungen gewöhnlicher Bruch und Dezimalzahl bei der Addition und Multiplikation von Brüchen gegenübergestellt werden!

Thema Nr. 2

1. Erläutern Sie den Begriff „quadratische Funktion"!

2. Diskutieren Sie verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge einer rein- bzw. gemischt quadratischen Gleichung für die Realschule!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit, in der die Scheitelpunktform $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ aus der Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \neq 0$ hergeleitet wird!

Thema Nr. 3

1. Charakterisieren Sie die relevanten Vierecksformen durch die Eigenschaft der Symmetrie und erläutern Sie eine geeignete Hierarchie!

2. Erläutern Sie zwei unterrichtliche Zugänge zur Flächeninhaltsformel für das Drachenviereck!

3. Nennen Sie Lernvoraussetzungen und Lernziele einer Unterrichtseinheit zur Einführung der Flächeninhaltsformel für das Trapez! Schildern Sie wesentliche unterrichtliche Schritte und begründen Sie diese unter mathematikdidaktischen Gesichtspunkten!

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________		
Kennwort: ____________	**Herbst 2022**	**43921**
Arbeitsplatz-Nr.: ________		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Fachdidaktik - berufliche Schulen**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): **3**

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: **2**

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

1. Erläutern Sie den Begriff „gebrochen-rationale Funktion“!

2. Beschreiben Sie zwei unterrichtliche Aktivitäten zur Untersuchung des Symmetrieverhaltens von Funktionen!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit, in der Funktionen der Form $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ behandelt werden!

Thema Nr. 2

1. Erläutern Sie die beiden Grundvorstellungen „Tangentensteigung“ und „lokale Änderungsrate“ zum Ableitungsbegriff!

2. Erläutern Sie die mathematische Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ im Rahmen der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ jeweils anhand eines Beispiels der Sekundarstufe I und II!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zur Einführung des Ableitungsbegriffs anhand der Tangentenvorstellung!

Thema Nr. 3

1. Erläutern Sie den Begriff Flächeninhalt auf dem Niveau der Sekundarstufe I aus fachlicher Sicht!

2. Die Flächeninhaltsformel für das Trapez kann unterschiedlich interpretiert werden. Erläutern Sie je eine geeignete geometrische Interpretation für $A = (a + c) \cdot \frac{h}{2}$ bzw. $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$! Nennen Sie dabei auch Lernziele, die mit der Betrachtung dieser verschiedenen Interpretationen verfolgt werden können!

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zur Herleitung der Flächenformel eines Trapezes!